অঙ্কের নমুনা প্রশ্নপত্র - ১

(নমুনা প্রশ্নপত্রের সমস্ত উত্তর দিয়েছেন মাধবদাস প্রধান, সহকারী শিক্ষক, যাদবপুর বিদ্যাপীঠ)

বিভাগ—'ক'

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ (বিকল্প প্রশ্নগুলি লক্ষণীয়) $1 \times 10 = 10$

(a) e^x এর বিস্তৃতির শর্ত হল

[i] $x > 0$ [ii] $2 < x < 3$ [iii] $-1 < x < 1$ [iv] $-\infty < x < \infty$

সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো।

উত্তর। (a) e^x-এর বিস্তৃতির শর্ত হল $-\infty < x < \infty$ — [iv]

(b) বিবৃতিটি সত্য অথবা মিথ্যা বল। $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স।

উত্তর। ধরি, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = 0\,(0 - 24) + 2\,(6 - 6) + 0\,(0 - 12) = 0$$

$\therefore$ A সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স

$\therefore$ বিবৃতিটি সত্য।

(c) **$3y^2 - 6y - 2x + 9 = 0$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ**

[i] $3x - 4 = 0$ [ii] $6x - 17 = 0$ [iii] $x - 3 = 0$ [iv] $y - 1 = 0$

সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো।

উত্তর। $3y^2 - 6y - 2x + 9 = 0$

or, $3\,(y^2 - 2y + 1) = 2x - 6$

or, $3\,(y - 1)^2 = 2\,(x - 3)$

or, $(y - 1)^2 = 4.\frac{1}{6}.(x - 3)$

নিয়ামকের সমীকরণ $x - 3 = -\frac{1}{6}$

or, $6x - 18 = -1$

or, $6x - 17 = 0$...........[ii]

অথবা, **$3x^2 + 2y^2 = 6$ উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক ____________ ।**

উত্তর। $3x^2 + 2y^2 = 6$

or, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$

or, $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y}{(\sqrt{3})^2} = 1$

$\therefore$ উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $\left(0, \pm\sqrt{3}\right)$।

(d) **যদি $f(x) = 2^{3x^2}$ হয়, তবে $f'(x) =$ ____________ ।**

উত্তর। $f(x) = 2^{3x^2}$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$f'(x) = 2^{3x^2} \cdot \log_e^2 \cdot 6x$$

$$= 6x \log_e^2 \cdot 2^{3x^2}$$

অথবা, **সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো ঃ**

যদি $f(x) = \log(3x + 1)$, তবে $f = (1)$-এর মান

[i] $\frac{9}{16}$ [ii] $-\frac{9}{16}$ [iii] $\frac{9}{4}$ [iv] $-\frac{9}{4}$

উত্তর। $f(x) = \log(3x+1)$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$f'(x) = \frac{3}{3x+1}$$

আবার, উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$f''(x) = -\frac{9}{(3x+1)^2}$$

$$\therefore\ f''(1) = -\frac{9}{(3+1)^2} = -\frac{9}{16}\text{..............[iv]}$$

(e) **সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো ঃ যদি $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান**

[i] $\tan\theta$ [ii] $-\tan\theta$ [iii] $-\cot\theta$ [iv] $\cot\theta$

উত্তর। $x = a\cos\theta$

উভয়পক্ষে θ-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$$

$$y = a\sin\theta$$

উভয়পক্ষে θ-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta\text{...........[iii]}$$

(f) **$\int e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$ এর মান**

[i] $\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + c$ [ii] $-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + c$ [iii] $e^{-\frac{1}{x}} + c$ [iv] $-e^{-\frac{1}{x}} + c$

উত্তর। $\int e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$

$= \int e^z\cdot dz$ ধরি, $-\frac{1}{x} = z$

$= e^z + c$ $\therefore\ \frac{1}{x^2}dx = dz$

$= e^{-\frac{1}{x}} + c$.............[iii]

অথবা, **যদি $\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + k\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ হয়, k-এর মান নির্ণয় করো।**

উত্তর। আমরা জানি, $\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

$$\therefore\ k = \frac{a^2}{2}$$

(g) **বিবৃতিটি সত্য অথবা মিথ্যা বল ঃ** $\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

উত্তর। ধরি, $\phi(x) = f(\sin x)$

$\therefore \phi(\pi - x) = f\{\sin(\pi - x)\}$

$= f(\sin x) = \phi(x)$

$\therefore \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx \quad \left[\because \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx, \text{ যখন } f(2a - x) = f(x)\right]$

$\therefore$ বিবৃতিটি সত্য।

অথবা, **বিবৃতিটি সত্য অথবা মিথ্যা বল ঃ**

যদি $f(a + x) = f(x)$ হয়, তবে $\int_0^{na} f(x)\,dx = n\int_0^{a} f(x)dx$

উত্তর। বিবৃতিটি সত্য।

(h) **শূন্যস্থান পূর্ণ করো ঃ** $\int e^{5\log x} dx =$ __________

উত্তর। $\int e^{5\log x} dx = \int e^{\log x^5} dx$

$= \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$, যেখানে c সমাকলন ধ্রুবক।

(i) **বিবৃতিটি সত্য অথবা মিথ্যা বল ঃ**

সমত্বরণে সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা। t সময়ে AB দূরত্ব অতিক্রম করে। কণাটির A বিন্দুতে ও B বিন্দুতে বেগের পরিমাণ যথাক্রমে u এবং v হলে, $\frac{t}{2}$ সময়ে কণাটির গতিবেগ $\frac{u+v}{2}$ হবে।

উত্তর। বিবৃতিটি সত্য।

(j) **সন্তত অপেক্ষক $y = f(x)$ বক্রের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ লেখো।**

উত্তর। সম্পর্কের সমীকরণ ঃ $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

বিভাগ—‘খ’

2. **নির্দেশ অনুযায়ী নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ**

(a) **যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ** **$2 \times 2 = 4$**

[i] $\left(2x + \frac{1}{3x^2}\right)^2$ **-এর x বর্জিত পদটি নির্ণয় করো।**

[ii] **বিস্তৃতি না করে** $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$ **নির্ণায়কটির মান নির্ণয় করো।**

[iii] **দুটি ঘটনা A এবং B প্রদত্ত আছে-**

$\mathbf{P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}}$ **হলে** $\mathbf{P\left(\frac{B}{A}\right)}$**-এর মান কত?**

উত্তর। [i] মনেকরি, বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি $(r+1)$ তম পদ।

$$\therefore\ t_{r+1} = {}^9c_r \cdot (2x)^{9-r} \cdot \left(\frac{1}{3x^2}\right)^r$$

$$= {}^9c_r \cdot 2^{9-r} \cdot x^{9-r} \cdot \frac{1}{3^r} \cdot \frac{1}{x^{2r}}$$

$$= {}^9c_r \cdot 2^{9-r} \cdot \frac{1}{3^r} \cdot x^{9-3r}$$

$$\therefore\ x^{9-3r} = x^{\circ}$$

$$\therefore\ 9 - 3r = 0 \qquad or,\ 3r = 9 \qquad or,\ r = 3$$

$\therefore$ x বর্জিত পদটি হল **চতুর্থ পদ**

এবং পদটির মান $= {}^9c_3 \cdot 2^{9-3} \cdot \dfrac{1}{3^3}$

$$= \frac{9!}{3!6!} \cdot 2^6 \cdot \frac{1}{3^3}$$

$$= \frac{\cancel{9} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7}{3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} \times \frac{2^6}{\underset{3}{\cancel{27}}} = \frac{1792}{9}$$

[ii]

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+w+w^2 & w & w^2 \\ 1+w+w^2 & w^2 & 1 \\ 1+w+w^2 & 1 & w \end{vmatrix} \quad \left[c_1' = c_1 + c_2 + c_3 \right]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & w & w^2 \\ 0 & w^2 & 1 \\ 0 & 1 & w \end{vmatrix}$$

[$\because$ w, 1-এর একটি অবাস্তব ঘনমূল।
$\therefore\ 1 + w + w^2 = 0$]

$= 0$ [$\because$ c_1-এর সমস্ত পদের মান 0]

[iii] আমরা জানি, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\therefore\ P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore\ P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times 3 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{4}.$$

(b) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ **$2 \times 1 = 2$**

[i] $x^2 - y^2 = 25$ কী ধরনের কণিক? এর উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় করো।

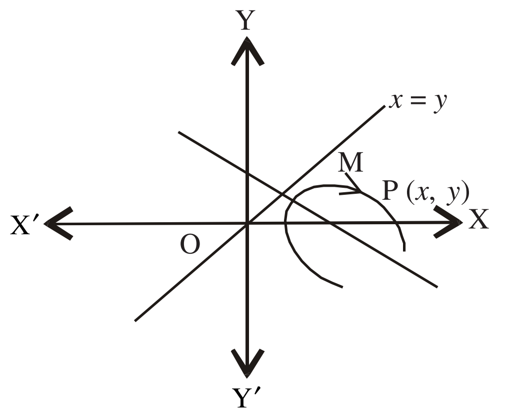
[ii] একটি অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক (4, 0) এবং তার নিয়ামকের সমীকরণ $x = y$, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো।

উত্তর। [i] $x^2 - y^2 = 25$

—কণিকটি **সমপরাবৃত্তের** সমীকরণ।

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা = $\sqrt{2}$.

[ii] ধরি, P (x, y) অধিবৃত্তের উপর যে-কোনো বিন্দু।



$$SP = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

$$PM = \pm \frac{x-y}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে, SP = PM

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \pm \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

or, $(x-4)^2 + y^2 = \dfrac{(x-y)^2}{2}$

or, $x^2 - 8x + 16 + y^2 = \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{2}$

or, $2x^2 - 16x + 32 + 2y^2 = x^2 - 2xy + y^2$

or, $x^2 + y^2 + 2xy - 16x + 32 = 0$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ $x^2 + y^2 + 2xy - 16x + 32 = 0$.

(c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ **$2 \times 1 = 2$**

[i] যদি $f(x) = \log x$ হয়, $f(\log x)$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

[ii] যদি $y = \sin^2 x$ হয়, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করো।

উত্তর। [i] $f(x) = \log x$

$\therefore f(\log x) = \log(\log x)$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{f(\log x)\} = \frac{d}{dx}\{\log(\log x)\}$$

$$= \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x \log x}$$

$\therefore f(\log x)$-এর অন্তরকলজ $\dfrac{1}{x \log x}$.

[ii] $y = \sin^2 x$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

আবার, উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cos 2x$$

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ **$2 \times 1 = 2$**

[i] মান নির্ণয় করো : $\displaystyle\int \frac{x^2}{2+x^3}dx$ **[ii] মান নির্ণয় করো :** $\displaystyle\int_0^{-1} \frac{1-x}{1+x}dx$

উত্তর। [i] $\displaystyle\int \frac{x^2}{2+x^3}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z}$$

ধরি, $2 + x^3 = z$

$\therefore\ 3x^2dx = dz$

$$= \frac{1}{3}\log|z| + c$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|2+x^3\right| + c,$$ যেখানে c সমাকলন ধ্রুবক।

[ii] $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{2-(1+x)}{1+x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+x}\,dx - \int_0^1 dx$$

$$= \left[2\log|1+x| - x\right]_0^1$$

$$= 2\log 2 - 1 - 0 + 0$$

$$= \log 4 - \log e = \log\left(\frac{4}{e}\right)$$

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও : **$2 \times 1 = 2$**

[i] $px + qy + r = 0$**-র অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো।**

[ii] $\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\frac{dy}{dx}}$ **-এর ক্রম ও ঘাত নির্ণয় করো।**

উত্তর। [i] $px + qy + r = 0$

or, $qy = -px - r$

or, $y = -\dfrac{p}{q}x - \dfrac{r}{q}$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$$

আবার, উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$ —ইহাই নির্ণেয় অবকল সমীকরণ।

[ii] $$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\frac{dy}{dx}}$$

or, $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1 + \frac{dy}{dx}$$

ক্রম = 2, ঘাত = 2

(f) যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ **$2 \times 3 = 6$**

[i] দেখাও যে $x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ অপেক্ষকের কোনো চরম বা অবম মান নেই।

[ii] যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা দাও।

[iii] $xy = c^2$ পরাবৃত্তের ওপর কোন্ বিন্দুতে তার অভিলম্ব $x + t^2y = 2c$ সরলরেখার ওপর লম্ব হবে?

[iv] $s = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$ হলে s-এর t-এর সাপেক্ষে পরিবর্তনের হার নির্ণয় করো যখন $t = 3$.

[v] সরলরেখার চলমান কোনো বস্তুকণার গতির সমীকরণ $x = 16x + 5t^2$ হলে দেখাও যে কণাটি সর্বদা সমত্বরণে চলমান হবে।

উত্তর। [i] ধরি, $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 6x + 9\\ &= 3(x^2 - 2x + 3)\\ &= 3(x^2 - 2x + 1 + 2)\\ &= 3\{(x-1)^2 + 2\}\end{aligned}$$

x-এর কোনো বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{dy}{dx} = 0$ (শূন্য) হতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত অপেক্ষকের কোনো চরম বা অবম মান নেই।

[ii] মনেকরি, $a \le x \le b$ সসীম বিস্তারে $f(x)$ একটি সংজ্ঞাত, একমান বিশিষ্ট ও সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। এখন, $a, a+h, a+2h, ..., a+(n-1)h, a+nh$ বিন্দুগুলি দ্বারা $a \le x \le b$ বিস্তারকে প্রত্যেকটি h দৈর্ঘ্যের n-সংখ্যক উপবিস্তারে বিভক্ত করা হলে, $a + nh = b$ বা, $nh = b - a$ হবে।

তাহলে, $$\lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh) = \int_a^b f(x)\,dx$$

যেখানে, b-কে সমাকলের উর্ধ্বসীমা ও
a-কে সমাকলের নিম্নসীমা বলে।

[iii] মনেকরি, নির্ণেয় বিন্দু (x_1, y_1)

$xy = c^2$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$y + x\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

$$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = -\frac{y_1}{x_1}$$

$$\therefore \left[\frac{-dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = \frac{x_1}{y_1}$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $= \dfrac{x_1}{y_1}$

$x + t^2y = 2c$ সরলরেখার প্রবণতা $= -\dfrac{1}{t^2}$.

$$\therefore \frac{x_1}{y_1}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = -1$$

or, $x_1 = y_1 t^2$

আবার, $x_1 y_1 = c^2$

or, $y_1^2 t^2 = c^2$

or, $y_1 t = \pm c$

or, $y_1 = \pm \frac{c}{t}$

$y_1 = \frac{c}{t}$ হলে, $x_1 = ct$

$y_1 = -\frac{c}{t}$ হলে, $x_1 = -ct$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ বা, $\left(-ct, -\frac{c}{t}\right)$

[iv] $s = \frac{t}{\sqrt{t+1}}$

উভয়পক্ষে t-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{t+1}\,.1 - t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t+1}}}{t+1}$$

$$= \frac{2(t+1) - t}{2(t+1)\sqrt{t+1}} = \frac{t+2}{2(t+1)\sqrt{t+1}}$$

$$\therefore \left[\frac{ds}{dt}\right]_{t=3} = \frac{3+2}{2.4.2} = \frac{5}{16}$$

$\therefore$ যখন $t = 3$, এখন t-এর সাপেক্ষে s-এর পরিবর্তনের হার $\frac{5}{16}$.

[v] $x = 16t + 5t^2$

উভয়পক্ষে t-এর সাপেক্ষে অবকল করে পাই,

$$v = \frac{dx}{dt} = 16 + 10t$$

আবার, উভয়পক্ষে t-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$f = \frac{d^2x}{dt^2} = 10 = \text{ধ্রুবক।}$$

$\therefore$ কণাটি সর্বদা সমত্বরণে চলমান হবে।

বিভাগ—‘গ’

3. নির্দেশ অনুযায়ী নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

(a) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও : **$4 \times 2 = 8$**

[i] 4 জন মহিলা এবং 7 জন পুরুষের মধ্যে 6 জনের একটি কার্যনির্বাহক কমিটি গঠন করা হয়। কমিটিতে [i] ঠিক দুই জন মহিলা সদস্য থাকার [ii] কমপক্ষে দুই জন মহিলা সদস্য থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

[ii] গাণিতিক আরোহ তত্ত্বের সাহায্যে প্রমাণ করো যে $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \ldots\ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$ যেখানে n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং $n \geq 1$.

[iii] ক্রমাঙ্কের পদ্ধতিতে সমাধান করো ঃ

$$3x + y + z = 10$$
$$x + y - z = 0$$
$$5x - 9y = 1$$

উত্তর। [i] 4 জন মহিলা ও 7 জন পুরুষের 6 জন নির্বাচন করা যাবে $^{11}C_6$ উপায়ে।

কমিটিতে ঠিক 2 জন মহিলা থাকলে পুরুষ থাকবে ঠিক 4 জন।

$\therefore$ 4 জন মহিলা থেকে 2 জন এবং 7 জন পুরুষ থেকে 4 জন নির্বাচন করা যাবে $^4C_2 \times {}^7C_4$ উপায়ে।

$\therefore$ ঠিক 2 জন মহিলা সদস্য থাকার সম্ভাবনা

$$= \frac{^4C_2 \times {}^7C_4}{^{11}C_6}$$

$$= \frac{4!}{2!2!} \times \frac{7!}{4!3!} \times \frac{6!5!}{11!}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{7!}}{\cancel{3!}} \times \frac{\cancel{6}\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\cancel{3!}\times\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{11\cdot\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot 8\cdot\cancel{7!}}$$

$$= \frac{5}{11}.$$

3 জন মহিলা ও 3 জন পুরুষ নির্বাচন করা যাবে $^4C_3 \times {}^7C_3$ উপায়ে

4 " " ও 2 " " " " " $^4C_4 \times {}^7C_2$ উপায়ে

$\therefore$ 6 জনের কমিটিতে কমপক্ষে 2 জন মহিলা সদস্য থাকবে

$$\text{এখন কমিটির সংখ্যা} = {}^4C_2 \times {}^7C_4 + {}^4C_3 \times {}^7C_3 + {}^4C_4 \times {}^7C_2$$

$$= \frac{\cancel{4!}}{2!2!} \times \frac{7!}{\cancel{4!}3!} + \frac{\cancel{4!}}{3!1!} \times \frac{7!}{\cancel{4!}3!} + \frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{4!}} \times \frac{7!}{5!2!}$$

$$= \frac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}} + \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} + \frac{7\cdot6}{2}$$

$$= 210 + 140 + 21$$

$$= 371$$

$\therefore$ 6 জনের কমিটিতে কমপক্ষে 2 জন মহিলা সদস্য থাকার সম্ভাবনা

$$= \frac{371}{^{11}C_6} = \frac{371}{\dfrac{11!}{6!\times 5!}}$$

$$= \frac{\overset{53}{\cancel{371}}\times\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}{11\cdot\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot 8\cdot\cancel{7}} = \frac{53}{66}.$$

[ii] মনেকরি, $P(n): \dfrac{1}{2.5} + \dfrac{1}{5.8} + \dfrac{1}{8.11} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \dfrac{n}{6n+4}$

$n = 1$ হলে,

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{2\cdot5} = \frac{1}{10}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \frac{1}{6\cdot1+4} = \frac{1}{10}$$

$\therefore$ $n = 1$ হলে, $P(n)$ সত্য

ধরি, $n = m$ হলে, $P(n)$ সত্য

$$\therefore P(m): \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + \ldots + \frac{1}{(3m-1)(3m+2)} = \frac{m}{6m+4}$$

এখন, $n = m + 1$ হলে

$$P\,(m+1) : \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3m-1)(3m+2)} + \frac{1}{(3m+2)(3m+5)}$$

$$= \frac{m}{6m+4} + \frac{1}{(3m+2)(3m+5)}$$

$$= \frac{3m^2+5m+2}{2\,(3m+2)(3m+5)}$$

$$= \frac{3m^2+3m+2m+2}{2\,(3m+2)(3m+5)}$$

$$= \frac{3m\,(m+1)+2\,(m+1)}{2\,(3m+2)(3m+5)}$$

$$= \frac{(m+1)\cancel{(3m+2)}}{2\,\cancel{(3m+2)}(3m+5)}$$

$$= \frac{m+1}{6m+10} = \frac{m+1}{6\,(m+1)+4}$$

$\therefore$ $n = m + 1$ হলে $P\,(m + 1)$ সত্য।

$\therefore$ গাণিতিক আরোহণ তত্ত্ব অনুসারে, $P\,(n)$ সত্য যেখানে n একটি পূর্ণসংখ্যা এবং $n \geq 1$.

[iii] Cramer-এর নিয়মের সাহায্যে আমরা জানি,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

যেখানে, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -9 & 0 \end{vmatrix}$ $= 3\,(0-9) - 1\,(0+5) + 1\,(-9-5)$ $= -27 - 5 - 14$ $= -46$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -9 & 0 \end{vmatrix}$ $= 10\,(0-9) - 1\,(0+1) + 1\,(0-1)$ $= -90 - 1 - 1$ $= -92$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 3\,(0+1) - 10\,(0+5) + 1\,(1-0)$ $= 3 - 50 + 1$ $= -46$

এবং $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 1 \end{vmatrix}$ $= 3\,(1+0) - 1\,(1-0) + 10\,(-9-5)$ $= 3 - 1 - 140$ $= -138$

$$\therefore\; x = \frac{-92}{-46} = 2,\; y = \frac{-46}{-46} = 1,\; z = \frac{-138}{-46} = 3$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{array}\right\}$

(b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও : **$4 \times 2 = 8$**

[i] $y^2 = 4ax$ **অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত $\left(at_1^2, 2at_1\right)$ এবং $\left(at_2^2, 2at_2\right)$ বিন্দু দুটির সংযোজক জ্যা-র সমীকরণ নির্ণয় করো। যদি জ্যা-টি অধিবৃত্তের নাভি দিয়ে যায়, তবে দেখাও যে, $t_1t_2 = -1$.**

[ii] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\left(a^2 > b^2\right)$ **উপবৃত্তের নাভিগামী কোনো জ্যা-এর দুটি বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ যথাক্রমে θ এবং ϕ হলে প্রমাণ করো $\frac{1-e}{1+e} + \tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2} = 0$.**

[iii] একটি পরাবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, -3)$ এবং $(2, 5)$; উৎকেন্দ্রতা $\frac{5}{4}$। পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো।

উত্তর। [i] $\left(at_1^2, 2at_1\right)$ ও $\left(at_2^2, 2at_2\right)$ বিন্দু দুটির সংযোজক জ্যা-র সমীকরণ হল—

$$\frac{y - 2at_1}{2at_1 - 2at_2} = \frac{x - at_1^2}{at_1^2 - at_2^2}$$

$$\text{or, } \frac{y - 2at_1}{2a(t_1 - t_2)} = \frac{x - at_1^2}{a(t_1 + t_2)(t_1 - t_2)}$$

$$\text{or, } \frac{y - 2at_1}{2} = \frac{x - at_1^2}{t_1 + t_2} \text{ ....[i]}$$

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(a, 0)$.

[i] নং সমীকরণটি $(a, 0)$ বিন্দুগামী

$$\therefore \frac{0 - 2at_1}{2} = \frac{a - at_1^2}{t_1 + t_2}$$

$$\text{or, } -\cancel{a}t_1 = \frac{\cancel{a}\left(1 - t_1^2\right)}{t_1 + t_2}$$

$$\text{or, } -t_1^2 - t_1t_2 = 1 - t_1^2$$

$$\text{or, } -t_1t_2 = +1 \qquad \text{or, } t_1t_2 = -1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

[ii] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\left(a^2 > b^2\right)$ উপবৃত্তের নাভিগামী কোনো জ্যা-এর দুটি বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ θ এবং ϕ.

দুটি বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ θ এবং ϕ

$\therefore$ বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ এবং $(a\cos\phi, b\sin\phi)$

$\therefore$ জ্যাটির সমীকরণ $\frac{y - b\sin\theta}{b\sin\theta - b\sin\phi} = \frac{x - a\cos\theta}{a\cos\theta - a\cos\phi}$ ....[i]

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের একটি নাভির স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$, যেখানে e হল উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা

[i] নং সমীকরণ $(ae, 0)$ বিন্দুগামী,

$$\therefore \frac{0 - b\sin\theta}{b(\sin\theta - \sin\phi)} = \frac{ae - a\cos\theta}{a(\cos\theta - \cos\phi)}$$

$$\text{or, } \frac{\cancel{-}\sin\theta}{2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\cancel{\frac{\theta-\phi}{2}}} = \frac{e - \cos\theta}{\cancel{-}2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\cancel{\frac{\theta-\phi}{2}}}$$

$$\text{or, } e\cos\frac{\theta+\phi}{2} - \cos\theta\cos\frac{\theta+\phi}{2} = \sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$\text{or, } e\cos\frac{\theta+\phi}{2} = \cos\theta\cos\frac{\theta+\phi}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$\text{or, } e\cos\frac{\theta+\phi}{2} = \cos\left(\theta - \frac{\theta+\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\text{or, } e = \frac{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}$$

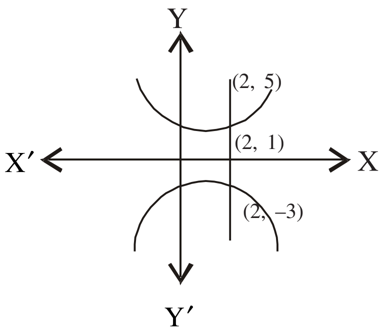
$$\text{or, } \frac{1-e}{1+e} = \frac{\cos\frac{\theta+\phi}{2} - \cos\frac{\theta-\phi}{2}}{\cos\frac{\theta+\phi}{2} + \cos\frac{\theta-\phi}{2}}$$

$$\text{or, } \frac{1-e}{1+e} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}}$$

$$\text{or, } \frac{1-e}{1+e} = -\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}$$

$$\text{or, } \frac{1-e}{1+e} + \tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2} = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

[iii]



যেহেতু, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (2, – 3) ও (2, 5) ; অতএব, পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল।

নাভিদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব = $2ae = \sqrt{(2-2)^2 + (5+3)^2} = 8$

$$\text{or, } ae = 4 \qquad (e = \text{উৎকেন্দ্রতা})$$

$$\text{or, } a\cdot\frac{5}{4} = 4 \qquad \left(\because e = \frac{5}{4}\right)$$

$$\text{or, } a = \frac{16}{5}$$

আমরা জানি, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

$$\text{or, } \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$$

$$\text{or, } b^2 = a^2\left(e^2-1\right)$$

$$= \frac{16\times16}{5\times5}\cdot\left(\frac{25}{16}-1\right)$$

$$= \frac{16\times\cancel{16}}{5\times5}\times\frac{9}{\cancel{16}} = \frac{144}{25}$$

পরাবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (2,1)$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ ঃ $\dfrac{(y-1)^2}{\frac{256}{25}} - \dfrac{(x-2)^2}{\frac{144}{25}} = 1$

$$\text{বা, } \frac{25\,(y-1)^2}{256} - \frac{25\,(x-2)^2}{144} = 1.$$

(c) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও : **4 × 2 = 8**

[i] মান নির্ণয় করো : $\displaystyle\lim_{n\to\alpha}\left[\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{\sqrt{n^3}}\right]$

[ii] প্রমাণ করো : $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x} = \frac{1}{3}\log 2$

[iii] মান করো : $\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{12+12x-9x^2}\;dx$

উত্তর। [i] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots..+\sqrt{2n}}{\sqrt{n^3}}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}+\ldots..+\frac{\sqrt{n+n}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\sqrt{\frac{n+r}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\sqrt{1+\frac{r}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}h\sum_{r=1}^{n}\sqrt{1+rh} \quad (\because nh=1) \quad = \int_0^1\sqrt{1+x}\;dx$$

$$= \left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(1+x)^{1+\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right) \quad = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

[ii] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\cos x}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\cdot\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx}{4+4\tan^2\frac{x}{2}+5-5\tan^2\frac{x}{2}} \qquad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{9-\tan^2\frac{x}{2}}$$

ধরি, $\tan\frac{x}{2} = z$

$\therefore\ \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dz$

x	0	$\pi/2$
z	0	1

$$= \int_0^1 \frac{2dz}{9-z^2} = 2\int_0^1 \frac{dz}{3^2-z^2}$$

$$= \frac{2}{2\cdot 3}\left[\log\left|\frac{3+z}{3-z}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\log 1$$

$$= \frac{1}{3}\log 2$$ (প্রমাণিত)

[iii] $\int (2x+1)\sqrt{12+12x-9x^2}\ dx$

$$= -\frac{1}{9}\int(-18x-9)\sqrt{12+12x-9x^2}\ dx$$

$$= -\frac{1}{9}\int(12-18x-21)\sqrt{12+12x-9x^2}\ dx$$

$$= -\frac{1}{9}\int(12-18x)\sqrt{12+12x-9x^2}\ dx + \frac{21}{9}\int\sqrt{12+12x-9x^2}\ dx$$

$$= -\frac{1}{9}\int\sqrt{12+12x-9x^2}\ d\left(12+12x-9x^2\right) + \frac{\cancel{21}^{\,7}}{\cancel{9}_{\,3}} \times \cancel{3}\int\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{4x}{3}-x^2}\ dx$$

$$= -\frac{1}{9}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\left(12+12x-9x^2\right)^{1+\frac{1}{2}} + 7\int\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}\ dx + c_1$$

$$= -\frac{2}{27}\left(12+12x-9x^2\right)^{\frac{3}{2}} + 7\left[\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{4x}{3}-x^2}}{2} + \frac{16}{18}\sin^{-1}\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\right] + c$$

$$= -\frac{2}{27}(12+12x-9x)^{\frac{3}{2}} + 7\left[\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{4x}{3}-x^2}}{2} + \frac{8}{9}\sin^{-1}\frac{3x-2}{4}\right] + c$$ (যেখানে c সমাকলন ধ্রুবক)

(d) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ **$4 \times 2 = 8$**

[i] সমাধান করো : $\frac{d^2y}{dx^2} = \log x + 2$, প্রদত্ত আছে $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ যখন $x = 1$

[ii] সমাধান করো : $(e^y + 1)\, x\, dx = (x + 1)\, e^y\, dy$.

[iii] জীবাণু নিয়ে কোনো এক গবেষণায় দেখা যায় যে কোনো সময়ে জীবাণুর সংখ্যা যে হারে বৃদ্ধি পায় তা ঐ সময়ে জীবাণুর সংখ্যার ঘনমূলের সমানুপাতিক। যদি তিন ঘণ্টায় জীবাণুর সংখ্যা আটগুণ হয়, তবে কত সময়ে ঐ সংখ্যা **64** গুণ হবে?

উত্তর। [i] $\frac{d^2y}{dx^2} = \log x + 2$

or, $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = (\log x + 2)\, dx$

$\therefore \int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int \log x\, dx + 2\int dx$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \log x \int dx - \int dx + 2\int dx$

or, $\frac{dy}{dx} = x \log x - x + 2x + c_1$

or, $\frac{dy}{dx} = x \log x + x + c_1$

প্রদত্ত $\frac{dy}{dx} = 0$ যখন $x = 1$

$\therefore 0 = \log 1 + 1 + c_1$ or, $c_1 = -1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x \log x + x - 1$

or, $dy = x \log x\, dx + x\, dx - dx$

$\therefore \int dy = \int x \log x\, dx + \int x\, dx - \int dx$

$\therefore y = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} - x + c_2$

or, $y = \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} - x + c_2$

প্রদত্ত $y = 0$, যখন $x = 1$

$\therefore 0 = \frac{1}{2}\log 1 + \frac{1}{4} - 1 + c_2$

$\therefore c_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore y = \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} - x + \frac{3}{4}$

[ii] $\left(e^y + 1\right) x dx = (x + 1)\, e^y dy$

or, $\frac{x dx}{x + 1} = \frac{e^y dy}{e^y + 1}$

or, $\int \frac{xdx}{x+1} = \int \frac{e^y dy}{e^y+1}$

or, $\int dx - \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{e^y dy}{e^y+1}$

or, $x - \log|x+1| = \log|e^y+1| + \log|c|$

or, $\log\left(\frac{e^x}{x+1}\right) = \log\left|c\left(e^y+1\right)\right|$

$\therefore \left|\frac{e^x}{x+1}\right| = \left|c\left(e^y+1\right)\right|$

$\therefore e^{2x} = c^2\left(e^y+1\right)^2 (x+1)^2$

[iii] মনেকরি, জীবাণুর সংখ্যা = G এবং সময় t
এবং ধরি প্রথমে জীবাণুর সংখ্যা = g

প্রশ্নানুযায়ী, $\frac{dG}{dt} \alpha\, G^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{dG}{dt} = kG^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{dG}{G^{\frac{1}{3}}} = \mathrm{K}\, dt$

$\therefore \int_g^{8g} \frac{dG}{G^{\frac{1}{3}}} = \int_0^3 kdt$

or, $\frac{3}{2}\left[G^{2/3}\right]_g^{8g} = [kt]_0^3$

or, $\frac{3}{2}\left\{(8g)^{2/3} - g^{2/3}\right\} = 3k$

or, $\frac{3}{2}\left\{4g^{2/3} - g^{2/3}\right\} = 3k$ or, $\frac{3}{2}g^{2/3} = k$

$\therefore \frac{dG}{G^{1/3}} = \frac{3}{2}g^{2/3}dt$

$\therefore \int_g^{64g} \frac{dG}{G^{1/3}} = \frac{3}{2}g^{2/3}\int_0^t dt$

or, $\frac{3}{2}\left[G^{2/3}\right]_g^{64g} = \frac{3}{2}g^{2/3}t$ or, $\frac{3}{2}\left(16g^{2/3} - g^{2/3}\right) = \frac{3}{2}g^{2/3}t$

or, $\frac{3}{2}.15g^{2/3} = \frac{3}{2}g^{2/3}t$ or, $t = 15$

$\therefore$ 15 ঘন্টায় জীবাণুর সংখ্যা 64 গুণ হবে।

(e) যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ **$4 \times 4 = 16$**

[i] উলম্ব অক্ষযুক্ত জলপূর্ণ একটি শঙ্কু আকৃতির পাত্র থেকে প্রতি মিনিটে **88** ঘনমিটার নির্দিষ্ট হারে পাম্প করে জল বার করা হচ্ছে। শঙ্কুর অর্ধশীর্ষ কোণ **45°** হলে যখন জলস্তম্ভের গভীরতা **2** মিটার তখন জলস্তম্ভের অবনমনের হার নির্ণয় করো।

[ii] যদি $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখাটি $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটির স্পর্শ করে, প্রমাণ করো $a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = p^2$।

[iii] প্রমাণ করো যে, কোনো প্রদত্ত বৃত্তের ভিতর সর্ববৃহৎ যে আয়তক্ষেত্র অন্তর্লিখিত করা যায় তা একটি বর্গক্ষেত্র।

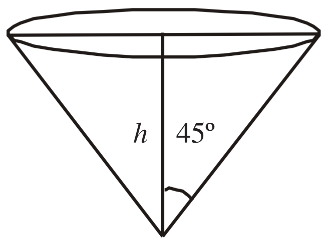
[iv] একটি খসড়া চিত্রে $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ অধিবৃত্তের অন্তর্গত ক্ষেত্রটি চিহ্নিত করো এবং সমাকলনের সাহায্যে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

[v] সরলরখোয় গতিশীল একটি বস্তুকণার ক্ষেত্রে $v^2 = u^2 + 2fs$ সূত্রটি প্রতিষ্ঠা করো। (চিহ্নগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে)।

[vi] সরলরেখার সমত্বরণে চলমান একটি কণার পরপর তিনটি অবকাশ t_1, t_2 এবং t_3-এর মধ্যে বেগ v_1, v_2 এবং v_3 হলে প্রমাণ করো যে $\dfrac{v_2 - v_1}{v_3 - v_2} = \dfrac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$ ।

[vii] একটি স্তম্ভের শীর্ষদেশ থেকে অবাধে পতনশীল একটি পাথরখণ্ড যখন x মিটার নেমেছে, তখন স্তম্ভের শীর্ষদেশ থেকে y মিটার নীচের একটি স্থান থেকে অপর একটি পাথরখণ্ড অবাধে নীচের দিকে ছেড়ে দেওয়া হয়। যদি সেগুলি স্থিরাবস্থা থেকে পড়ে এবং উভয়ে একই সঙ্গে মাটিতে পৌঁছায়, তবে দেখাও যে স্তম্ভের উচ্চতা $\dfrac{(x+y)^2}{4x}$ মিটার।

উত্তর। [i] মনেকরি, শঙ্কু আকৃতির পাত্রের ব্যাসার্ধ r মিটার এবং উচ্চতা h মিটার



$$\therefore \frac{h}{r} = \cot 45^\circ = 1$$

$$\therefore r = h$$

শঙ্কুর আয়তন $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi h^3 \quad (\because r = h)$

$$v = \frac{1}{3}\pi h^3$$

উভয়পক্ষে t -এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\cancel{3}}\pi.\cancel{3}h^2.\frac{dh}{dt}$$

$$\text{or, } 88 = \frac{22}{7} \times 2^2 \times \frac{dh}{dt} \quad \left[\because \frac{dv}{dt} = 88 \text{ এবং } h = 2\right]$$

$$\text{or, } \frac{dh}{dt} = \frac{88 \times 7}{22 \times 2^2} = 7$$

$\therefore$ যখন জলের গভীরতা 2 মিটার তখন জলস্তম্ভের অবনমনের হার 7 মিটার/মিনিট।

[ii] $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{or, } \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2} \times \frac{b^2}{2y} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$ [(x_1, y_1) উপবৃত্তের উপর যে-কোনো বিন্দু]

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

or, $a^2 y\, y_1 - a^2 y_1^{\,2} = -b^2 x\, x_1 + b^2 x_1^{\,2}$

or, $b^2 x\, x_1 + a^2 y\, y_1 = a^2 y_1^{\,2} + b^2 x_1^{\,2}$ $\left[\because \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1\right]$

or, $b^2 x\, x_1 + a^2 y\, y_1 = a^2 b^2$........... [i]

আবার, $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ সরলরেখাটি উপবৃত্তকে স্পর্শ করে।

$$\therefore \frac{b^2 x_1}{\cos\alpha} = \frac{a^2 y_1}{\sin\alpha} = \frac{a^2 b^2}{p}$$

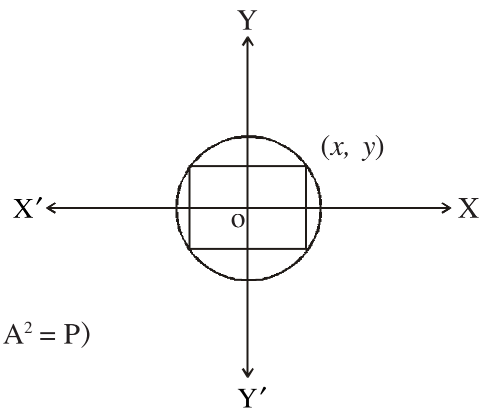
$$\therefore x_1 = \frac{a^2 \cos\alpha}{p} \text{ এবং } y_1 = \frac{b^2 \sin\alpha}{p}$$

$\because$ (x_1, y_1) উপবৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দু

$$\therefore \frac{a^4 \cos^2\alpha}{p^2 a^2} + \frac{b^4 \sin^2\alpha}{p^2 b^2} = 1$$

or, $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = p^2$ **(প্রমাণিত)**

[iii] মনেকরি, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$,
যেখানে a বৃত্তের ব্যাসার্ধ
মনেকরি, (x, y) বৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দু।



$\therefore$ বৃত্তের ভিতর আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $= 2x$

ও প্রস্থ $= 2y$

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= A = 2x.2y = 4xy$

$\therefore A^2 = 4x^2y^2$

$P = 4x^2(a^2 - x^2)$ (ধরি, $A^2 = P$)

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$\frac{dP}{dx} = 8x(a^2 - x^2) - 4x^2.2x$$
$$= 8xa^2 - 16x^3$$

আবার, উভয়পক্ষে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 8a^2 - 48x^2$$

এখন, P এর চরম বা অবম মানের জন্য,

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

or, $8xa^2 - 16x^3 = 0$

or, $8x(a^2 - 2x^2) = 0$

or, $a^2 = 2x^2$ [$x \neq 0$, $\because$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $2x$]

or, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ [x ঋণাত্মক হতে পারে না]

এখন, $\left[\frac{d^2P}{dx^2}\right]_{x=\frac{a}{\sqrt{2}}} = 8a^2 - 48 \times \frac{a^2}{2}$

$= -16a^2 < 0$

$\therefore\ x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ হলে P-এর চরম মান আছে।

$\therefore\ x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ হলে A^2-এর চরম মান আছে।

$\therefore\ x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ হলে A-এর চরম মান আছে।

এখন $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ হলে, $y^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\therefore\ y = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ A-এর চরম মান আছে যখন $x = y$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সর্ববৃহৎ হলে সেটি একটি বর্গক্ষেত্র হবে।

[iv] $x^2 = 4ay$

or, $y = \frac{x^2}{4a}$

$y^2 = 4ax$

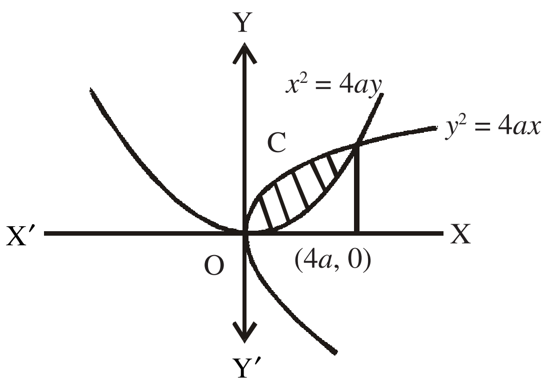
$\therefore\ \frac{x^4}{16a^2} = 4a^x$

or, $x^3 = 64a^3$ or, $x = 0$

or, $x = 4a$

$x = 0,\ y = 0$

$x = 4a, y = 4a$



$\therefore$ OABCO অংশের ক্ষেত্রফল

$= \int_0^{4a} y\,dx$ [যেখানে $y^2 = 4ax$] $- \int_0^{4a} y\,dx$ [যেখানে $x^2 = 4ay$]

$= \int_0^{4a} 2\sqrt{a}\sqrt{x}\ dx - \int_0^{4a} \frac{x^2}{4a}\ dx$

$= 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^{4a} - \frac{1}{4a}.\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{4a}$

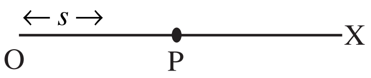
$= \frac{4\sqrt{a}}{3}.8a\sqrt{a} - \frac{1}{4a}.\frac{1}{3}.64a^3$

$= \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2$

$= \frac{16a^2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{16a^2}{3}$ বর্গএকক।

[v]



মনেকরি, $\overrightarrow{OX}$ সরলরেখায় f সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা u প্রারম্ভিক বেগে O বিন্দু থেকে যাত্রা করে এবং t সময়ে কণাটি P বিন্দুতে আসে, যেখানে $OP = s.$

যেহেতু, কণাটি f সমত্বরণে গতিশীল, সুতরাং P বিন্দুতে কণার বেগ v হলে, কণার গতির সমীকরণ হয়

$$\frac{dv}{dt} = f \qquad \text{বা, } \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = f$$

বা, $v\cdot\frac{dv}{ds} = f \quad \left[\because \text{P বিন্দুতে কণার বেগ} = v = \frac{ds}{dt}\right]$

বা, $vdv = fds$

$\therefore \int v\,dv = \int f\,ds$

বা, $\frac{v^2}{2} = fs + \frac{c}{2}$

বা, $v^2 = 2fs + c \quad [\, c = \text{সমাকলনের ধ্রুবক}\,]$

প্রশ্নানুযায়ী, $v = u$ যখন $s = 0$

$\therefore u^2 = c$

$\therefore v^2 = u^2 + 2fs$ **(প্রমাণিত)**

[vi] মনেকরি, কণার প্রারম্ভিক বেগ u এবং সেটি f সমত্বরণে গতিশীল। যদি t_1, t_2 ও t_3 সময়ের অবকাশ শেষে কণার বেগ যথাক্রমে x, y ও z হয়, তবে

$\therefore x = u + ft_1$.........(1)

$y = u + f(t_1 + t_2)$......(2)

$z = u + f(t_1 + t_2 + t_3)$......(3)

প্রশ্নানুযায়ী, $v_1 = \frac{u+x}{2}$, $v_2 = \frac{x+y}{2}$, $v_3 = \frac{y+z}{2}$

$$\therefore \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_2} = \frac{\frac{x+y}{2} - \frac{u+x}{2}}{\frac{y+z}{2} - \frac{x+y}{2}} = \frac{y-u}{z-x}$$

$$= \frac{u + f\left(t_1 + t_2\right) - u}{u + f\left(t_1 + t_2 + t_3\right) - \left(u + ft_1\right)}$$

$$= \frac{f\left(t_1 + t_2\right)}{t\left(t_1 + t_2 + t_3 - t_1\right)}$$

$$= \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3} \quad [\because f \neq 0]$$ **(প্রমাণিত)**

[vii] মনেকরি, AB স্তম্ভের শীর্ষদেশ A এবং তার উচ্চতা h মিটার।

A শীর্ষদেশ থেকে অবাধে ছেড়ে দেওয়া প্রথম পাথরখণ্ড যখন C বিন্দুতে আসে, তখন D বিন্দু থেকে দ্বিতীয় পাথরখণ্ড অবাধে ছেড়ে দেওয়া হয়।

প্রশ্নানুযায়ী, $AC = x$, $AD = y.$

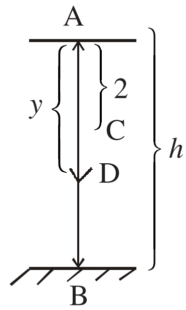
মনেকরি, C বিন্দুতে প্রথম পাথরখণ্ডের বেগ $u.$

$\therefore u^2 = 2gx \quad [\because$ পাথরখণ্ডটিকে A বিন্দু থেকে স্থিরাবস্থায় ছাড়া হয় $]$

আবার, প্রশ্নানুযায়ী, C বিন্দু থেকে প্রথম ও D বিন্দু থেকে স্থিরাবস্থায় ছেড়ে দেওয়া দ্বিতীয় পাথরখণ্ড একই সঙ্গো মাটিতে পড়ে। উক্ত অবস্থান দুটি থেকে t সেকেন্ড সময় পরে সেগুলি মাটিতে পৌঁছলে, তাদের গতির সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$\text{CB} = ut + \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{এবং } \text{DB} = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore\ h - x = ut + \frac{1}{2}gt^2 \text{..........[i]} \qquad \therefore\ h - y = \frac{1}{2}gt^2 \text{..........[2]}$$



[1] থেকে [2] বিয়োগ করে পাই

$$ut = (h - x) - (h - y) = y - x$$

$$\text{or, } t = \frac{y - x}{u}$$

t -এর মান (2)-এ বসিয়ে পাই,

$$h - y = \frac{1}{2} \cdot g \frac{(y-x)^2}{u^2} = \frac{1}{2} g \cdot \frac{(y-x)^2}{2gx} \quad \left[\because u^2 = 2gx\right]$$

$$\text{or, } h = y + \frac{(y-x)^2}{4x} = \frac{4xy + (y-x)^2}{4x} = \frac{(x+y)^2}{4x}.$$

$\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ মিটার **(প্রমাণিত)**।

বিভাগ—'ঘ'

4. নির্দেশ অনুযায়ী নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ **$6 \times 4 = 24$**

{ (a) ও (b)-এর মধ্যে যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও }

{ (c) ও (d)-এর মধ্যে যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও }

{ (e), (f) ও (g)-এর মধ্যে যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও }

(a) [i] $(1+x)^{32}$-এর বিস্তৃতিতে $(3r+1)$ তম পদের সহগ $(x+5)$ তম পদের সহগের সমান হলে, r-এর মান নির্ণয় করো।

[ii] $n\ (>1)$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে দেখাও যে $(4^{2n+2} - 15n - 16)$ সর্বদাই 225 দ্বারা বিভাজ্য। **3+3**

(b) [i] যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত কোনো অধিবর্ষে 53টি রবিবার থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

[ii] $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\infty$ এবং $z = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \ldots\ldots\infty$ হলে দেখাও যে $x = \log_e \frac{1}{1-e^z}$

3 + 3

(c) [i] $y = e^{\sin^{-1}x}$ এবং $z = e^{\cos^{-1}x}$ হলে প্রমাণ করো যে $\frac{dy}{dz}$-এর মান x-এর উপর নির্ভর করে না। **3 + 3**

[ii] $xy + 1 = \cos(xy)$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করো যখন $x = \frac{\pi}{2}, y = 0$

(d) [i] $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) + \sin(\log x)$ হলে $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় করো।

[ii] $x^2 + y^2 = a^2$ হলে দেখাও যে $\frac{\left(1+y_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_2} = -a$. **3 + 3**

(e) [i] মান নির্ণয় করো : $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^4 x} dx$. [ii] মান নির্ণয় করো : $\int \frac{2^x\, dx}{\sqrt{4^x - 2^{x+2} + 5}}$. **3 + 3**

(f) [i] মান নির্ণয় করো : $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$

[ii] মান নির্ণয় করো : $\int \frac{dx}{b^2\cos^2 x + a^2\sin^2 x}$ 3 + 3

(g) [i] মান নির্ণয় করো : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{(2-\cos x)(3+\cos x)}$

[ii] মান নির্ণয় করো : $\int \frac{x\,dx}{(x-1)\left(x^2+4\right)}$ 3 + 3

(h) [i] নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞার সাহায্যে $\int_a^b x^2\,dx$-এর মান নির্ণয় করো।

[ii] মান নির্ণয় করো : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$ 3 + 3

উত্তর। (a) [i] $(1+x)^{32}$ বিস্তৃতিতে $(3r+1)$ তম পদ

$$= t_{3r+1} = {}^{32}C_{3r} \cdot x^{3r}$$

এবং $(r+5)$ তম পদ $= t_{r+5}$

$$= t_{(r+4)+1} = {}^{32}C_{r+4} \cdot x^{r+4}$$

প্রশ্নানুযায়ী, ${}^{32}C_{3r} = {}^{32}C_{r+4}$

$\therefore$ হয়, $3r = r+4$ অথবা, $3r + r + 4 = 32$

বা, $2r = 4$ বা, $4r = 28$

বা, $r = 2$ বা, $r = 7$

$\therefore$ r-এর মান 2 বা 7.

[ii] $4^{2n+2} - 15n - 16$

$= 16^{n+1} - 15n - 16$

$= (1+15)^{n+1} - 15n - 16$

$= 1 + {}^{n+1}C_1\,15 + {}^{n+1}C_2\,15^2 + {}^{n+1}C_3\,15^3 + \ldots\ldots + 15^{n+1} - 15n - 16$

$= 1 + 15(n+1) + 15^2\left[{}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3\,15 + \ldots\ldots + 15^{n-1}\right] - 15n - 16$

$= 15^2\left[{}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3 \cdot 15 + \ldots..15^{n-1}\right]$

$= 225\left[{}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3 \cdot 15 + \ldots.. + 15^{n-1}\right]$

$\therefore$ $x > 1$ যে-কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে প্রদত্ত রাশিটি সর্বদা 225 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

(b) [i] যেহেতু, অধিবর্ষে 366 দিন থাকে এবং 366 দিনে 52টি পূর্ণ সপ্তাহ ও 2 দিন অতিরিক্ত থাকে।

স্পষ্টতই, 52 সপ্তাহ থেকে 52টি রবিবার পাওয়া যাবে এবং যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত অধিবর্ষে 53টি রবিবার থাকতে হলে অতিরিক্ত দুটি দিনের মধ্যে একটি রবিবার থাকতে হবে।

এখন, সপ্তাহের পরপর দুটি দিন নিম্নলিখিত বিভিন্ন প্রকার হতে পারে—

[i] রবিবার, সোমবার [ii] সোমবার, মঙ্গলবার [iii] মঙ্গলবার, বুধবার [iv] বুধবার, বৃহস্পতিবার

[v] বৃহস্পতিবার, শুক্রবার [vi] শুক্রবার, শনিবার [vii] শনিবার, রবিবার

সুতরাং, ‘‘সপ্তাহের পরপর দুটি দিন’’ নমুনা দেশের অন্তর্গত সমভাবে সম্ভাব্য নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 7

মনেকরি, A = নির্বাচিত অধিবর্ষে 53টি রবিবার থাকার ঘটনা।

তাহলে, A ঘটনার অন্তর্গত নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 2

$\therefore$ A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা = $P(A) = \frac{2}{7}$.

[ii] $$y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\infty$$
$$= e^{-x}$$
$$z = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \ldots\ldots\infty$$
$$= \log_e(1-y)$$
$$\text{or, } e^z = 1 - y$$
$$\text{or, } e^z = 1 - e^{-x}$$
$$\text{or, } e^{-x} = 1 - e^z$$
$$\text{or, } e^x = \frac{1}{1-e^z}$$
$$\therefore x = \log_e \frac{1}{1-e^z}$$ **(প্রমাণিত)**

(c) [i] $y = e^{\sin^{-1}x}$ $\qquad z = e^{-\cos^{-1}x}$

$$\therefore \frac{y}{z} = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{e^{-\cos^{-1}x}} = e^{\sin^{-1}x + \cos^{-1}x}$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} \quad \left[\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\therefore y = ze^{\frac{\pi}{2}}$$

উভয়পক্ষে z-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$\frac{dy}{dz} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

$\therefore \frac{dy}{dx}$-এর মান x-এর উপর নির্ভর করে না।

[ii] $xy + 1 = \cos(xy)$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$y + x\frac{dy}{dx} = -\sin(xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$
$$\text{or, } \left(y + x\frac{dy}{dx}\right)[1 + \sin(xy)] = 0$$
$$\therefore y + x\frac{dy}{dx} = 0 \quad [1 + \sin(xy) \neq 0]$$
$$\text{or, } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

যখন $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, তখন $\frac{dy}{dx} = 0$.

(d) [i] $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) + \sin(\log x)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}\right) + \sin(\log x)$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}\right\} + \sin(\log x)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}\right) + \sin(\log x)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\frac{x}{2}}\right) + \sin(\log x)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right) + \sin(\log x)$$

$$= \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right\} + \sin(\log x)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + \sin(\log x)$$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{2} + \frac{\cos(\log x)}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\log x)}{x} - \frac{1}{2}$$

[ii] $x^2 + y^2 = a^2$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ বা, $y_1 = -\frac{x}{y}$

আবার, উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}$$

$$\therefore \frac{\left(1+y_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_2} = \frac{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{a^2}{y^3}}$$

$$= -\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y^3} \times \frac{y^3}{a^2}$$

$$= -\frac{a^3}{y^3} \times \frac{y^3}{a^2}$$

$= -a$ **(প্রমাণিত)**

(e) [i] $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^4 x}\, dx$

$= \int \sqrt{\tan x}\,.\sec^4 x\, dx$

$= \int \sqrt{\tan x}\left(1+\tan^2 x\right)\sec^2 x\, dx$

$= \int z\left(1+z^4\right).\,2z dz$ ধরি, $\tan x = z^2$

$= 2\int\left(z^2+z^6\right)dz$ $\therefore\ \sec^2 x\, dx = 2\, zdz$

$= \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{7}z^7 + c$

$= \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + \frac{2}{7}\tan^{\frac{7}{2}} x + c,$ $c =$ সমাকলনের ধ্রুবক।

[ii] $\int \frac{2^x\, dx}{\sqrt{4^x - 2^{x+2} + 5}}$

$= \frac{1}{\log_e^2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-4z+5}}$ ধরি, $2^x = z$

$= \frac{1}{\log_e^2}\int \frac{dz}{\sqrt{(z-2)^2+(1)^2}}$ $\therefore\ 2^x.\log_e^2 dx = dz$

$= \frac{1}{\log_e^2}\log_e\left|z-2+\sqrt{z^2-4z+5}\right| + c$

$= \frac{1}{\log_e^2}\log_e\left|2^x-2+\sqrt{4^x-2^{x+2}+5}\right| + c,$ $c =$ সমাকলনের ধ্রুবক।

(f) [i] $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\, dx$

$= \tan^{-1}\sqrt{x}\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)\int dx\right\}dx$

$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \int \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x\, dx$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{z.2zdz}{1+z^2}$$

ধরি, $x = z^2$

$dx = 2zdz$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \int \frac{1+z^2-1}{1+z^2}\,dz$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \int dz + \int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - z + \tan^{-1} z + c$$

$$= x\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \tan^{-1}\sqrt{x} + c$$

$$= (x+1)\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c,$$ c = সমাকলনের ধ্রুবক।

[ii] $$\int \frac{dx}{b^2\cos^2 x + a^2\sin^2 x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{b^2 + a^2\tan^2 x}$$

ধরি, $\tan x = z$

$\therefore\ \sec^2 x\,dx = dz$

$$= \int \frac{dz}{b^2 + a^2 z^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{z^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{b}{a}}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{z}{\frac{b}{a}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a\,z}{b}\right) + c$$

$$= \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a\tan x}{b}\right) + c,$$ c = সমাকলনের ধ্রুবক।

(g) [i] $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{(2-\cos x)(3+\cos x)}$$

$$= -\int_1^0 \frac{dz}{(2-z)(3+z)}$$

ধরি, $\cos x = z$

$\therefore\ -\sin x\,dx = dz$

$$= \int_0^1 \frac{dz}{(2-z)(3+z)} \qquad \left[\because \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\right]$$

x	0	$\pi/2$
z	1	0

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{(2-z)+(3+z)}{(2-z)(3+z)}\,dz$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \left(\frac{1}{3+z} + \frac{1}{2-z}\right)dz$$

$$= \frac{1}{5}\left[\log_e|3+z| - \log_e|2-z|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5}\left(\log_e^4 - \log_e^1 - \log_e^3 + \log_e^2\right)$$

$$= \frac{1}{5}\log_e\left(\frac{8}{3}\right)$$

[ii] $\int \frac{x\,dx}{(x-1)\left(x^2+4\right)}$

ধরি, $\frac{x}{(x-1)\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A\left(x^2+4\right)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)\left(x^2+4\right)}$

$\therefore\ x = A\,(x^2+4) + (x-1)\,(Bx+C)$

$x = 1$ হলে, $1 = 5A + 0 \ \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

উভয়পক্ষে x^2-এর সহগ সমান করে পাই,

$$0 = A + B \ \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{5}$$

আবার, উভয়পক্ষে ধ্রুবক পদ সমান করে পাই,

$$O = 4A - C \ \Rightarrow C = 4A = \frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \int \frac{x\,dx}{(x-1)\left(x^2+4\right)}$$

$$= \int\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}}{x^2+4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int\frac{xdx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{10}\int\frac{2xdx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{5}\log|x-1| - \frac{1}{10}\log\left|x^2+4\right| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$ $c =$ সমাকলনের ধ্রুবক।

(h) [i] $\int_a^b x^2dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(a+rh)^2$;

$f(x) = x^2$
$f(a+rh) = (a+rh)^2$
$nh = b - a$

$$= \lim_{h\to 0} h\sum_{n=1}^{n}\left(a^2+2arh+r^2h^2\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} a^2 + \lim_{h\to 0} 2ah^2\sum_{r=1}^{n} r + \lim_{h\to 0} h^3\sum_{r=1}^{h} r^2$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left(a^2nh\right) + \lim_{h\to} \frac{2ah^2\,n(n+1)}{2} + \lim_{h\to 0}\frac{h^3n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(a^2 nh\right) + \lim_{h\to 0} \left\{anh\,(nh+h)\right\} + \lim_{h\to 0} \frac{nh(nh+h)\,(2nh+h)}{6}$$

$$= \lim_{h\to 0} \{a^2\,(b-a)\} + \lim_{h\to 0} \{a\,(b-a)\,(b-a+h)\} + \lim_{h\to 0} \frac{(b-a)\,(b-a+h)\left\{2\,(b-a)+h\right\}}{6} \quad (\because nh = b-a)$$

$$= a^2\,(b-a) + a\,(b-a)^2 + \frac{2\,(b-a)^3}{6}$$

$$= (b-a)\left\{a^2 + a\,(b-a) + \frac{(b-a)^2}{3}\right\}$$

$$= \frac{(b-a)}{3}\cdot\left(\cancel{3a^2} + 3ab - \cancel{3a^2} + b^2 - 2ab + a^2\right)$$

$$= \frac{(b-a)\left(b^2 + ba + a^2\right)}{3}$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

[ii] $$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}\,dx \quad \left[\because \int_0^a f\,(x)\,dx = \int_0^a f\,(a-x)\,dx\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\,dx$$

$$\therefore\ 2\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx$$

$$= [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \mathrm{I} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$